明治大学科学技術研究所紀要
27(1)：1—4，1988

Mem. Inst. Sci. Tech. Meiji Univ.,
27(1): 1—4, 1988

行列〔$1/(x_i-y_j)$〕の LU 分解

金　子　幸　臣

LU Decomposition of the Matrix 〔$1/(x_i-y_j)$〕

Satiomi KANEKO

School of Engineering, Meiji University,
Tama-ku, Kawasaki, Kanagawa 214

Received April 30, 1988; Accepted May 18, 1988

Synopsis Let $H=LU$ be the LU decomposition of the general Hilbert matrix H of order n with the entries $h_{ij}=1/(x_i-y_j)$, where $x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots, y_1, y_2, \cdots, y_n \cdots$ are distinct numbers, L is a lower triangular matrix with entries l_{ij} such that $l_{ij}=0$ for $i>j$, $l_{ii}=1$ for uniqueness' sake, and U is an upper triangular matrix with u_{ij}, such that $u_{ij}=0$ for $i>j$. And let $M=L^{-1}$, and $V=U^{-1}$.

Simple and n-independent expressions for the entries l_{ij}, m_{ij}, u_{ij} and v_{ij} are obtained in the following way.

The relation $U=L^{-1}H=MH$ can be considered as a decomposition of a rationl function $u_k(y)=u_{kj}$ into partial fractions $m_{k1}/(x_1-y_j)+m_{k2}/(x_2-y_j)+\cdots\cdots+m_{kk}/(x_k-y_j)$, thus $u_k(y)$ having zeros at $y_1, y_2, \cdots, y_{k-1}$(for $u_k(y_1)=u_{k1}=0, \cdots, u_k(y_{k-1})=u_{k,\,k-1}=0$) and simple poles at $x_1, x_2, \cdots, x_k$ which determine $u_k(y)$ except a constant factor, $m_{kj}=\lim y\to x_k(x_j-y)u_k(y)$ the coefficients of $1/(x_j-y)$ in the partial fraction decomposition of $u_k(y)$, and the constant factor is determined by the condition $m_{kk}=1$.

Similarly, l_{ik} and v_{ik} are obtained from the relation $L=HV$.

〔はじめに〕

ここに言う"一般ヒルベルト行列"のLU分解も，必要な時に，文献などに見出しにくいので[1)]，便利のため求めておいた。

〔定　　義〕

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n,\ \cdots$ を相異る数の列とする。n 次の行列 H の ij 成分 h_{ij} が

$$h_{ij}=\frac{1}{x_i-y_j}$$

と表わされるとき，Hを一般ヒルベルト行列という。Hは逆行列をもつ。Lを左下三角行列，Uを右上三角行列として，Hをそれらの積の形 $H=LU$ に表わすことを，LU分解という。

さらに，$M=L^{-1}$, $V=U^{-1}$ とする。すなわち，成分について表わせば，

$$l_{ij}=0,\quad m_{ij}=0\quad (i<j)$$

$$u_{ij}=0,\quad v_{ij}=0\quad (i>j)$$

$$\sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik}\, u_{kj}=h_{ij}=\frac{1}{x_i-y_j}$$

ここで，Lについて条件

(A)　$l_{ij}=1,\quad (i=j)$

を採用すると，逆行列 $L^{-1}=M$ の成分についても $m_{ii}=1$ となり，LU 分解は一意となることが，容易に示される[2)]。

多項式　$X_k(t)$，$Y_k(t)$，$k=1, 2, \cdots\cdots$ を，

$$X_k(t)=(t-x_1)(t-x_2)\cdots\cdots(t-x_k),$$

$$Y_k(t)=(t-y_1)(t-y_2)\cdots\cdots(t-y_k)$$

とする。

〔結　　果〕

$$c_k=\frac{-X_{k-1}(x_k)}{Y_{k-1}(x_k)}$$

とおくと，0でない成分は

$$l_{ij}=\frac{y_k-x_k}{c_k}\quad\frac{X_{k-1}(x_i)}{Y_k(x_i)},\quad u_{kj}=c_k\frac{Y_{k-1}(y_j)}{X_k(y_i)},$$

$$v_{ik}=\frac{y_k-x_k}{c_k}\quad\frac{X_{k-1}(y_i)}{Y_k'(y_i)},\quad m_{kj}=-c_k\frac{Y_{k-1}(x_j)}{X_k'(x_j)}$$

これらの右辺は，Hの次数にはよっていない。

〔証　　明〕

$U=L^{-1}H=MH$ より

$$u_{kj}=\sum_{i=1}^{k}\frac{m_{ki}}{(x_i-y_j)}=u_k(y_j)$$

ここに　$u_k(y)=\sum_{i=1}^{k}\frac{m_{ki}}{(x_i-y)}=\frac{R(y)}{(y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_k)}=\frac{R(y)}{X_k(y)}$，$R(y)$ は $(k-1)$ 次の多項式。

$y=y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{k-1}$ のとき $u_k(y_j)=u_{kj}=0$ より

$$R(y)=c_k(y-y_1)(y-y_2)\ \cdots\ (y-y_{k-1})=c_k Y_{k-1}(y)$$

$R(y)$, $Y_{k-1}(y)$ とも $(k-1)$ 次であるから，c_k は定数である。よって

(1) $\quad (u_k(y)=\quad)\ \sum_{i=1}^{k}\frac{m_{ki}}{(x_i-y)}=\frac{c_k\ Y_{k-1}(y)}{X_k(y)}$

両辺に (x_j-y) を掛けて約分し，$y=x_j$ とおくと，

$$\left(X_k'(x)\equiv\frac{d}{dx}\ X_k(x)\right)$$

$$m_{kj}=-c_k\frac{Y_{k-1}(x_j)}{X_k'(x_j)}$$

$$=-c_k\frac{(x_j-y_1)(x_j-y_2)\cdots\cdots(x_j-y_j)\cdots\cdots(x_j-y_{k-1})}{(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}$$

特に $j=k$ のとき $m_{kk}=1$

$$1=m_{kk}=-\frac{c_k\ Y_{k-1}(x_k)}{X_k'(x_k)}=-c_k\frac{Y_{k-1}(x_k)}{X_{k-1}(x_k)}.$$

よって

$$c_k=-\frac{X_{k-1}(x_k)}{Y_{k-1}(x_k)}$$

一方 $L=HU^{-1}=HV$ から同様に

$$l_{ik}=\sum_{j=1}^{k}\frac{v_{ik}}{(x_i-y_j)}=l_k(x_i)$$

ここに

(2) $\quad l_k(x)=\sum_{j=1}^{k}\frac{v_{jk}}{(x-y_j)}=d_k\frac{X_{k-1}(x)}{Y_k(x)}$

$$1=l_{kk}=l_k(x_k)=d_k\frac{X_{k-1}(x_k)}{Y_k(x_k)}$$

$$=\frac{d_kX_{k-1}(x_k)}{(x_k-y_k)Y_{k-1}(x_k)}=\frac{d_kc_k}{(y_k-x_k)}$$

よって $\quad d_k=\frac{y_k-x_k}{c_k}$

(2) に $(x-y_i)$ を掛けて約分し，$x=y_i$ とおくと

$$v_{ik}=d_k\frac{X_{k-1}(y_i)}{Y_k'(y_i)}=\frac{(y_k-x_k)}{c_k}\quad\frac{X_{k-1}(y_i)}{Y_k'(y_i)}$$

〔おわりに〕

n 次の切片としてHを考えたが，〔結果〕はnによっていない。すなわち H，L，M，U，Vはすべて無限行列でよかった。

また，条件 $l_{ii}=1$ をはずせば，c_k は 0 以外，任意でよい。

$LU=H$を成分で書くと

$$\sum_{k=1}^{i,j} \frac{X_{k-1}(x_i)}{Y_i(x_i)}(y_k-x_k)\frac{Y_{k-1}(y_j)}{X_k(y_j)}=\frac{1}{x_i-y_j}$$

同様に

$$LM=I \text{ は } \sum_{k=i}^{j}\frac{X_{k-1}(x_i)}{Y_k(x_i)}(x_k-y_k)\frac{Y_{k-1}(x_j)}{X_k'(x_j)}=\delta_{ij}$$

$$ML=I \text{ は } \sum_{k=i}^{j}\frac{X_{i-1}(x_k)}{Y_i(x_k)}\ \frac{Y_{j-1}(x_k)}{X_j(x_k)}(x_j-y_j)=\delta_{ij}$$

$$VM=H^{-1} \text{ は } \sum_{k=\max(i,j)}^{n}\frac{X_{k-1}(y_i)}{Y_k'(y_i)}(x_k-y_k)\frac{Y_{k-1}(x_j)}{X_k'(x_j)}=\frac{X_n(y_i)}{Y_n'(y_i)}\ \frac{1}{y_i-x_j}\ \frac{Y_n(x_j)}{X_n'(x_j)}$$

などが成立することを示している。

文　　　献

1) S. Hitotumatu, Cholesky decomposition of the Hilbert matrix, JJAM, 5 no. 1, p. 135—144

2) B. Wendroff Theoretical Numerical Analysis Academic Press, New York 1966 (邦訳 サイエンス社 サイエンスライブラリー 情報電算機 19・戸川隼人訳)